Chapitre 5

Valeurs Propres et Vecteurs Propres

$\mathbf{E}$ désignera par la suite un espace vectoriel sur un corps $\mathbf{K}$ ($\mathbf{K} = \mathbb{R}$, ou $\mathbb{C}$), de dimension finie n, $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n et f un endomorphisme de $\mathbf{E}$. Une base de étant choisie dans $\mathbf{E}$, on utilisera la même notation pour désigner un vecteur $x \in \mathbf{E}$ et ses composantes $\in \mathbf{K}$. La bijection $f \longrightarrow M(f)$ où $M(f)$ est la matrice de f, permet d'étendre les notions définies pour f à toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ et vice-versa.

5.1 Valeurs Propres et vecteurs propres

Soit A une matrice carrée d'ordre n ; $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, ($\mathbf{K} = \mathbb{R}$, ou $\mathbb{C}$) ; on s'intéresse à l'équation du type

$$Ax = \lambda x \tag{5.1}$$

où $\lambda \in \mathbf{K}$ et $x \in \mathbf{E}$. On constate que $x = 0$ est une solution triviale ; notre but est de trouver celles qui sont non triviales ; de telles solutions sont appelées vecteurs propres de A.

Définition 5.1.1. *: On appelle valeur propre de A, tout élément λ de $\boldsymbol{K}$ tel qu'il existe un vecteur $x \neq 0$ vérifiant $Ax = \lambda x$. L'équation (5.1) est équivalente à :*

$$(A - \lambda I)x = 0 \tag{5.2}$$

On sait que (5.2) n'a pas de solution triviale si et seulement si $det(A - \lambda I) = 0$ où det désigne le déterminant. Si l'on développe le déterminant, on *trouve un polynôme de degré n en λ, appelé le polynôme caractéristique de A et est noté $p_A(\lambda)$; c.à.d $p_A(\lambda) = det(A - \lambda I)$.*

Théorème 5.1.1. *: Les valeurs propres de A sont les racines du polynôme caractéristique, et les vecteurs propres correspondants sont les solutions non triviales de*

$$(A - \lambda I)x = 0.$$

Exemple 5.1.1. *:*

Trouver les valeurs et vecteurs propres de la matrice :
$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -8 \end{pmatrix}$
Le polynôme caractéristique de A est :
$det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 4 & -8-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 7\lambda,$

qui a pour racines 0 et -7, les valeurs propres sont donc 0 et -7. Pour déterminer les vecteurs propres correspondants, remplaçons λ par 0 et -7 dans (5.2), on obtient :

Pour $\lambda = 0$, $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ c'est à dire $x_1 = 2x_2$, donc $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

Pour $\lambda = -7$, on a $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$

Remarque 5.1.1. *: On utilisera les abréviations v_p pour valeur propre et V_p pour vecteur propre.*

Théorème 5.1.2. *: 1) A tout vecteur propre $x \neq 0_{\boldsymbol{E}}$ de A correspond une valeur propre λ.*

2) A toute valeur propre λ de A correspond un sous-espace vectoriel de $\boldsymbol{E}$ noté $\boldsymbol{E}_\lambda = \{x \in \boldsymbol{E} / Ax = \lambda x\}$ tel que $\boldsymbol{E}_\lambda \neq \{0_{\boldsymbol{E}}\}$, et $A(\boldsymbol{E}_\lambda) \subset \boldsymbol{E}_\lambda$ (c'est à dire $\boldsymbol{E}_\lambda$ est stable par A).

Preuve : 1) Soient λ_1 et λ_2 deux valeurs propres distinctes associées à x, c'est à dire $Ax = \lambda_1 x$ et $Ax = \lambda_2 x$ d'où $\lambda_1 x = \lambda_2 x$ ce qui entraîne

$(\lambda_1 - \lambda_2)x = 0$, comme $\lambda_1 \neq \lambda_2$ alors $x = 0_{\mathbf{E}}$.

2) a) $\mathbf{E}_\lambda \neq \emptyset$ car $A0_{\mathbf{E}} = 0_{\mathbf{E}} = \lambda 0_{\mathbf{E}}$ c.à.d $0_{\mathbf{E}} \in \mathbf{E}_\lambda$.

b) $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{K}$ et $x_1, x_2 \in \mathbf{E}$ entraînent $A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 A(x_1) + \alpha_2 A(x_2) = \alpha_1 \lambda x_1 + \alpha_2 \lambda x_2 = \lambda(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)$. Donc $\mathbf{E}_\lambda$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{E}$.

c) $\mathbf{E}_\lambda \neq \{0_{\mathbf{E}}\}$ car λ valeur propre entraîne l'existence d'un $x \neq 0_{\mathbf{E}}$ tel que $Ax = \lambda x$ c.à.d $x \in \mathbf{E}_\lambda$.

d) $A(\mathbf{E}_\lambda) \subset \mathbf{E}_\lambda$ car si $x \in \mathbf{E}_\lambda$, $Ax = \lambda x \in \mathbf{E}_\lambda$.

Remarque 5.1.2. *: $\boldsymbol{E}_\lambda$ est appelé le sous-espace propre associé à λ.*

5.2 Propriétés des vecteurs propres et valeurs propres

Théorème 5.2.1. *: Si $A \in \mathcal{M}_n(\boldsymbol{K})$ et $\lambda \in \boldsymbol{K}$, alors on a les équivalences suivantes :*

1) λ est une valeur propre de A.

2) $(A - \lambda I)$ n'est pas inversible.

3) $det(A - \lambda I) = 0$.

Preuve : 1) $\Longrightarrow$ 2) λ est une valeur propre de A entraîne l'existence d'un $x \neq 0_{\mathbf{E}}$ tel que $Ax = \lambda x$ c.à.d $Ax - \lambda x = 0_{\mathbf{E}}$ d'où $(A - \lambda I)x = 0_{\mathbf{E}}$ $(*)$, ce qui entraîne $(A - \lambda I)$ n'est pas inversible, car si $(A - \lambda I)$ est inversible, en multipliant $(*)$ par $(A - \lambda I)^{-1}$ on aurait $x = 0_{\mathbf{E}}$.

2) $\Longrightarrow$ 3) Trivial.

3) $\Longrightarrow$ 1) Voir Théorème 5.1.1.

Remarque 5.2.1. *: 0 est une valeur propre de A si et seulement si A n'est pas inversible.*

Proposition 5.2.1. *: 1) Si λ_1 et λ_2 sont deux valeurs propres distinctes de A, alors $\boldsymbol{E}_{\lambda_1} \cap \boldsymbol{E}_{\lambda_2} = \{0_{\boldsymbol{E}}\}$.*

2) Si $\lambda_1, ..., \lambda_m$ sont des valeurs propres distinctes d'une matrice carrée A et $e_1, ..., e_m$ les vecteurs propres correspondants, alors le système $\{e_1, ..., e_m\}$ est libre.

Preuve : 1) Soit $x \in \mathbf{E}_{\lambda_1} \cap \mathbf{E}_{\lambda_2}$, alors $x \in \mathbf{E}_{\lambda_1}$ d'où $Ax = \lambda_1 x$ et $x \in \mathbf{E}_{\lambda_2}$ d'où $Ax = \lambda_2 x$; on a alors $\lambda_1 x = \lambda_2 x$ c.à.d $(\lambda_1 - \lambda_2)x = 0$, or $\lambda_1 \neq \lambda_2$, donc $x = 0_{\mathbf{E}}$.

2) On procède par récurrence

$$\alpha_1 e_1 + ... + \alpha_m e_m \;=\; 0_{\mathbf{E}} \tag{5.3}$$

On applique A, on obtient $\alpha_1\lambda_1 e_1 + ... + \alpha_m \lambda_m e_m = 0_{\mathbf{E}}$, on multiplie (5.3) par λ_m et en soustrayant on a : $\alpha_1(\lambda_m - \lambda_1)e_1 + ... + \alpha_{m-1}(\lambda_m - \lambda_{m-1})e_{m-1} = 0_{\mathbf{E}}$.

L'hypothèse de récurence entraîne $\alpha_i = 0$ pour $i = 1, ..., m-1$, en remplaçant dans (5.3) on obtient $\alpha_m = 0$.

Corollaire 5.2.1. *: 1) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\boldsymbol{K})$, alors A a au plus n valeurs propres distinctes deux à deux.*

2) Si $\lambda_1, ..., \lambda_m$ sont des valeurs propres distinctes d'une matrice carrée A, alors le sous-espace vectoriel $\boldsymbol{E}_{\lambda_1} + ... + \boldsymbol{E}_{\lambda_m}$ est somme directe de $\boldsymbol{E}_{\lambda_1}, ..., \boldsymbol{E}_{\lambda_m}$.

Preuve : 1) Si A admet m valeurs propres distinctes deux à deux avec $m > n$ et $e_1, ..., e_m$ les vecteurs propres associés aux λ_i, la proposition (5.2.1) entraîne $\{e_1, ..., e_m\}$ libre, or $m > n$ entraîne $\{e_1, ..., e_m\}$ lié (car $n = dim\mathbf{E}$), d'où contradiction.

2) On doit montrer que tout $x \in \mathbf{E}_{\lambda_1} + ... + \mathbf{E}_{\lambda_m}$ s'écrit d'une manière unique sous la forme $x = x_1 + ... + x_m$ où les $x_i \in \mathbf{E}_{\lambda_i}$.

En effet, supposons que $x = x_1 + ... + x_m = x'_1 + ... + x'_m$ avec $x_i, x'_i \in \mathbf{E}_{\lambda_i}$, alors $(x_1 - x'_1) + ... + (x_m - x'_m) = 0$ où les $(x_i - x'_i) \in \mathbf{E}_{\lambda_i}$. On a d'après la proposition (5.2.1) $x_i = x'_i$ pour $i = 1, ..., m$ car sinon les $\left\{x_{i_1} - x'_{i_1}, ..., x_{i_l} - x'_{i_l}\right\}$ forment un système lié.

5.3 Propriétés du polynôme caractéristique

Théorème 5.3.1. *: Le polynôme caractéristique $p_A(\lambda)$ de la matrice A est invariant lorsque l'on remplace A par une matrice semblable (c.à.d $p_A(\lambda) = p_B(\lambda)$ pour $B = P^{-1}AP$ et P inversible).*

Preuve : En effet $B = P^{-1}AP$ entraîne $B - \lambda I = P^{-1}AP - \lambda I = P^{-1}(A - \lambda I)P$, d'où $p_B(\lambda) = det(B - \lambda I) = detP^{-1}det(A - \lambda I)detP = detP^{-1}detPdet(A - \lambda I) = det(P^{-1}P)det(A - \lambda I) = det(A - \lambda I) = p_A(\lambda)$.

Remarque 5.3.1. *: 1) Si f est un endomorphisme de $\boldsymbol{E}$ et $M(f)$ la matrice associée à f, lorsque $\boldsymbol{E}$ est muni d'une base, on peut définir le polynôme caractéristique de f par $p_f(\lambda) = p_{M(f)}(\lambda)$ et ce dernier ne dépend pas de la base choisie puisque deux matrices associées à un endomorphisme sont semblables.*

2) Deux matrices semblables ont les mêmes valeurs propres.

Théorème 5.3.2. *: Soit f un endomorphisme de $\boldsymbol{E}$ et $p_f(x)$ son polynôme caractéristique admettant dans $\boldsymbol{K}$ une racine multiple λ d'ordre k, alors $1 \leq dim_{\boldsymbol{K}}\boldsymbol{E}_\lambda \leq k$.*

Preuve : Supposons $dim_{\mathbf{K}}\mathbf{E}_\lambda = r$. Alors $\mathbf{E}_\lambda$ contient r vecteurs propres linéairement indépendants $v_1, ..., v_r$, nous pouvons compléter $\{v_i\}$ de manière à obtenir une base de $\mathbf{E}$
$\{v_1, ..., v_r, w_1, ..., w_s\}$.

Nous avons

$$\begin{array}{rcl}
f(v_1) & = & \lambda v_1 \\
f(v_2) & = & \lambda v_2 \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
f(v_r) & = & \lambda v_r \\
f(w_1) & = & a_{11}v_1 + ... + a_{1r}v_r + b_{11}w_1 + ... + b_{1s}w_s \\
f(w_2) & = & a_{21}v_1 + ... + a_{2r}v_r + b_{21}w_1 + ... + b_{2s}w_s \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
f(w_s) & = & a_{s1}v_1 + ... + a_{sr}v_r + b_{s1}w_1 + ... + b_{ss}w_s
\end{array}$$

La matrice de f dans la base ci-dessus est

$$M(f) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 & a_{11} & a_{21} & \dots & a_{s1} \\ 0 & \lambda & \dots & 0 & a_{12} & a_{22} & \dots & a_{s2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & a_{1r} & a_{2r} & \dots & a_{sr} \\ & & & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & b_{21} & \dots & b_{s1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_{12} & b_{22} & \dots & b_{s2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_{1s} & b_{2s} & \dots & b_{ss} \end{pmatrix}$$

$p_f(x) = det(M(f) - xI) = (\lambda - x)^r det(B - xI_s)$ où B est la matrice (b_{ij}) et I_s la matrice unité d'ordre s. Comme par hypothèse $p_f(x) = (\lambda - x)^k g(x)$ où $g(\lambda) \neq 0$, il s'ensuit que $r \leq k$.

5.4 Diagonalisation

Définition 5.4.1. *Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(K)$ est appelée matrice diagonale si elle est de la forme :*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

c'est à dire si $a_{ij} = 0$ pour $i \neq j$.

On sait que les matrices diagonales sont simples du point de vue calculatoire et théorique. Par exemple, la solution de $Ax = c$, où A est une matrice de $\mathcal{M}_n(K)$ est généralement lassante lorsque n est grand, mais elle est triviale si A est diagonale. De même élever une matrice à une puissance très large (par exemple A^{100}) est en général encombrant par calcul direct, mais devient trivial si A est diagonale. Ainsi la diagonalisation d'une matrice, c.à.d sa réduction à une forme diagonale, s'avérera très intéressante.

Définition 5.4.2. *On dit qu'une matrice carrée est diagonalisable s'il existe une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale, disons*

$$P^{-1}AP = D.$$

Lorsque c'est le cas, on dit que P diagonalise A.

Théorème 5.4.1. *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(K)$, *alors*

1) A est diagonalisable ssi A possède n vecteurs propres linéairement indépendants.

2) Si A possède n vecteurs propres linéairement indépendants $p_1, \cdots, p_n$ *et* $P = (p_1, \cdots, p_n)$, *alors* $P^{-1}AP = D$ *est diagonale, où le* $j^{\text{ème}}$ *élément diagonal de D est égal à la* $j^{\text{ème}}$ *valeur propre de A.*

$\Rightarrow$) Si A est diagonalisable, il existe une matrice inversible

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} \tag{5.4}$$

telle que

$$P^{-1}AP = D = \begin{bmatrix} d_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix}. \tag{5.5}$$

Multiplions (5.5) par P, on obtient

$$AP = \begin{bmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1p_{11} & \cdots & d_np_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ d_1p_{n1} & \cdots & d_np_{nn} \end{bmatrix} \tag{5.6}$$

$AP = (d_1p_1, \cdots, d_np_n)$ où p_j désigne la $j^{\text{ème}}$colonne de P, de même

$$AP = A(p_1, \cdots, p_n) = (Ap_1, \cdots, Ap_n) \tag{5.7}$$

En comparant (5.6) et (5.7), nous obtenons

$$\begin{aligned} Ap_1 &= d_1p_1 \\ \vdots & \quad\quad \vdots \\ Ap_n &= d_np_n \end{aligned} \tag{5.8}$$

$p_1, \cdots, p_n$ sont non nuls, sinon P ne serait pas inversible. (5.8) prouve que les p_i sont des vecteurs propres non nuls, et les d_i sont des valeurs propres. Le rang de P doit être n, car P est inversible ; donc les colonnes de P doivent être linéairement indépendantes. Nous avons démontré aussi 2).

$\Leftarrow$) Si A possède n vecteurs propres linéairement indépendants, disons $p_1, \cdots, p_n$, soit $d_1, \cdots, d_n$ les valeurs propres respectives. Alors

$$\begin{aligned} AP &= (Ap_1, \cdots, Ap_n) = (d_1p_1, \cdots, d_np_n) \\ &= \begin{bmatrix} d_1p_{11} & \cdots & d_np_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ d_1p_{n1} & \cdots & d_np_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix} = PD \end{aligned} \tag{5.9}$$

P est inversible car ses colonnes sont linéairement indépendantes, en multipliant (5.9) par P^{-1}, on obtient $P^{-1}AP = D$. A est alors diagonalisable.

Remarque 5.4.1. *Si $A \in \mathcal{M}_n(K)$ a n valeurs propres distinctes, alors A est diagonalisable (Il suffit de combiner la proposition du paragraphe 1.2 et le théorème 1.6).*

Définition 5.4.3. *Soit $p(x)$ un polynôme à coefficients dans K, de degré n, on dit qu'il est scindé s'il s'écrit sous la forme d'un produit de n polynômes du premier degré à coefficients dans K, c'est à dire $p(x) = a(x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_n)$ où $a, \alpha_1, \cdots, \alpha_n \in K$.*

Théorème 5.4.2. *(Condition nécessaire et suffisante de diagonalisation)*
Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$, A est diagonalisable ssi :

1) p_A est scindé dans K;

2) Pour chaque racine λ_i de p_A, d'ordre k_i, $dim\, E_{\lambda_i} = k_i$.

$\Rightarrow$)

$$P^{-1}AP = D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$p_A(x) = p_D(x) = (\lambda_1 - x)\cdots(\lambda_n - x)$, les racines de $p_A(x)$ sont les $\lambda_i \in K$ donc 1) est vérifiée. En faisant intervenir l'ordre de multiplicité des λ_i, on peut écrire

$p_A(x) = (\lambda_1 - x)^{k_1}\cdots(\lambda_m - x)^{k_m}$. On a $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} k_i = n$. Comme A est diagonalisable, $E = E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_m}$, d'où $dim_K E = n = \sum_{i=1}^{m} dim\, E_{\lambda_i}$.

Si l'une des $dim_K E_{\lambda_i} < k_i$, on aurait $\sum_{i=1}^{m} dim\, E_{\lambda_i} < n$.

$\Leftarrow$) On a $n = k_1 + \cdots + k_m$.

2) entraîne $dim(E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_m}) = \sum_{i=1}^{m} dim\, E_{\lambda_i} = \sum_{i=1}^{m} k_i = n = dim\, E$.

La réunion des bases des E_{λ_i} est une base de E formée de vecteurs propres, d'où A est diagonalisable.

Corollaire 5.4.1. *Si $A \in \mathcal{M}_n(K)$ possède n valeurs propres distinctes, alors A est diagonalisable.*

1) du théorème 1.7 est vérifiée. En outre $1 \leq dim\, E_{\lambda_i} \leq 1$, donc 2) est satisfaite et A est diagonalisable.

Exemple 5.4.1. *1) Etudier la diagonalisation de la matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Solution :

Le polynôme caractéristique de A est :

$$\begin{aligned} p_A(x) &= \begin{vmatrix} 3-x & -2 & 0 \\ -2 & 3-x & 0 \\ 0 & 0 & 5-x \end{vmatrix} = (5-x) \begin{vmatrix} 3-x & -2 \\ -2 & 3-x \end{vmatrix} \\ &= (5-x)[(3-x)^2 - 4] = (5-x)^2(1-x) \end{aligned}$$

les valeurs propres sont 1 et 5. Les espaces propres sont E_1 et E_5.

$\underline{E_\lambda :}$ $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ *est un vecteur propre de A correspondant à λ ssi x n'est pas une solution triviale de $(A - \lambda I)x = 0$ c'est à dire*

$$\begin{bmatrix} 3-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 5-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad . \tag{5.10}$$

Si $\lambda = 5$, alors

$$\begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

d'où $-2x_1 - 2x_2 = 0$, c'est à dire $x_2 = -x_1$ donc

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

c'est à dire E_5 est engendré par $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ *et* $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Si $\lambda = 1$ (5.10) devient

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

On résout le système pour trouver $x_1 = x_2$ et $x_3 = 0$, alors

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

donc E_1 est engendré par $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. *On en déduit que A est diagonalisable,*

$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ *et* $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

2) Considérons la matrice

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$p_A(\lambda) = (\lambda + 1)^2$; $\lambda = -1$ *est la seule valeur propre de A;*

E_{-1} :

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

On résout le système pour en déduire que $x_1 = x_2$*, c'est à dire* E_{-1} *est engendré par* $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. *Comme* $dim_{\mathbb{R}} E_{-1} = 1 < 2$, A *n'est pas diagonalisable.*

3) Soit f *l'opérateur linéaire défini par*

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} 3x_1 - 2x_2 \\ -2x_1 + 3x_2 \\ 5x_3 \end{bmatrix}.$$

Trouver une base de $\mathbb{R}^3$ *par rapport à laquelle la matrice de* f *soit diagonale.*

<u>Solution :</u> Si $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ *est la base canonique de* $\mathbb{R}^3$*, alors*

$$f(e_1) = f(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix},\ f(e_2) = f(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$f(e_3) = f(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

On en déduit que $M(f) = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ *par rapport à la base* B. *Nous voulons trouver une nouvelle base* $B^{'} = \{u_1^{'}, u_2^{'}, u_3^{'}\}$ *de telle sorte que la matrice* $A^{'}$ *de* f *relative à* $B^{'}$ *soit diagonale. Si nous désignons par* P *la matrice de passage de la base canonique* B *à la base inconnue* $B^{'}$*, on a* $A^{'} = P^{-1}AP$*; c'est à dire* P *diagonalise* $M(f)$*. D'après l'exemple 1), nous obtenons*

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad et \quad A^{'} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Les colonnes de P sont

$$\begin{aligned} u_1^{'} &= e_1 - e_2 \\ u_2^{'} &= e_3 \\ u_3^{'} &= e_1 + e_2 \end{aligned}$$

qui produisent la matrice diagonale $A^{'}$ de f.